場の量子論と新量子物理学

　これは 2007 年 11 月 25 日午後 工学院大学で行った講演である。このファイル作成に当たっては 東大理 野地俊平君の応援を頂いた。感謝する。同じ内容のものを

Quantum Theory of Wave Fields and New Quantum Physics

と題して 2008 年 3 月 6 日午後、Institute of Physics of Vietnam, Hanoi で講演した。

場の量子論と新量子物理学

宮沢弘成

現在のいわゆる「場の量子論」は不完全なものであり、正しい形態はいかにあるべきかを論じる。これから派生して、量子物理学の新しい解釈について述べる。電子の物理のかなりの部分は古典物理学なのである。

1. 序

２０年前私の東大退官の際シンポジウムをやった。そのとき場の量子論について話をして、現在の理論は不完全であるので、正しい理論を創りたいとの方向を示した。以下にこの計画がどうなったか、その後の展開を述べる。

場の量子論をやりたいのだが、場の古典論は完成しているからこれを量子化すればよい。量子化とは何か？ 量子論とは何か？を突き詰めて考えるのは面白い。結論として、電子の多くの現象、Bohr の古典量子論、光電効果、Compton 効果などは量子現象ではなく電子の古典場で解釈されるべきものである。電子の Schrödinger 方程式も古典物理と言える。ただし電子同士の相互作用が問題になるとき、いまの言葉で言えば多電子問題は古典物理ではなく、ここで量子論が適用されることになる。現在第２量子化と呼ばれるものが実は本当の量子化なのである。

2. 場と質点

まず場とは何か、これと対比される質点とはなにかをはっきりさせる [1]。質点あるいは粒子とは、点状のものが空間を動くという考えであり、

$$\text{Particles} \qquad \boldsymbol{x}_i(t), \quad i = 1, 2, \cdots, n, \quad n = \text{No. of particles} \tag{1}$$

と表される。添字 i は粒子の番号である。一方場は時空点の状態を記述するもので、

$$\text{Field}, \qquad \phi_\alpha(\boldsymbol{x}, t), \qquad \alpha = \text{場の種類} \tag{2}$$

で表される。

質点系の量子論は確立している。Newton 力学を量子力学に変えればよい。すなわち、系を正準変数で書いてそれに交換関係を課せばよい。現在の場の量子論のやり方は次の通り。格子とか正規直交系を導入して場を可付番無限個の力学系に置き換える。

$$\text{Field} = \sum_a \text{particle}_a, \tag{3}$$

この力学系を量子化するのである。例えば電磁場は平面波と特定の偏りを持つ固有関数で展開すると、

$$\text{E. M. Field} = \sum_a \text{Harmonic oscillator}_a,$$

で、これを量子化すると、

$$\text{Quantized E. M. Field} = \sum_a \text{Photon}_a.$$

一般に量子化を Q で表して、

$$Q(\text{Field}) = Q(\sum_a \text{particle}_a) \approx \sum_a Q(\text{particle}_a)$$

最後の等式は無限和が十分速く収束すれば成り立つのだが、実際は収束どころか発散する。S-行列理論（＝繰り込み理論）ならば収束することがあり、QED では実験とよく一致し、正しい理論である。しかし一般にはうまくいかず、これで場の量子論が出来たとは言えない。

質点系と場とが対比されたのは流体力学である。と言うより物理学に場が現れたのは流力が最初であろう。流体の運動を数学で記述するのに、Lagrange はつぎのようにしたといわれる。流体を質点の集まりとし、時刻 t_0 での位置 $\boldsymbol{x}_0$ で質点に名前を付け、その後の位置を

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0; t),$$

で表す。当然

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0; t_0).$$

である。これはまさに無限大自由度の力学系である。$\boldsymbol{x}(t)$ に対し Newton の運動方程式が書けるのだが、このやり方は成功しなかった。

一方 Euler のやり方は流体を場で記述する。時空点 $\boldsymbol{x}, t$ での速度、密度などを

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t), \quad \rho(\boldsymbol{x}, t),$$

と書く。$\boldsymbol{x}$ は変数であって径数ではない。これらはまさに**場**である。運動方程式は $\boldsymbol{x}, t$ についての偏微分方程式である。これで流体力学が完成する。

現在の場の量子論は Lagrange 式である。これでは大成は期しがたい。Euler 式が本当の場の理論である。

3. 量子化とは何か

問題は場を量子化することである。量子化を前節では物理量を q-数（非可換量）化して適当な交換関係を置くことと考えた。しかしこのやり方ではどうしても多粒子系の量子力学にしかならない。状態の時間的変化を追求するという非相対論的な形式であり、場の理論とは言えない。

前世紀初頭量子物理、すなわち電子の物理が展開されたのを思い出してみると、本質的なことは、Newton 力学が破綻し、量子力学にとって代わられたと言うより、粒子とされた電子を波（場）としたことである。すなわち、$\boldsymbol{x}(t)$ で記述していた電子を $\psi(\boldsymbol{x},t)$ で書き表す。その理論建設に当たっての指導原理は対応原理、つまり場の物理がある近似でもとの粒子の物理になると言うことである。正準量子化法は対応原理が自動的に出てくるのであった。

電子の（第１）量子化は

$$\boldsymbol{x}(t) \quad \to \quad \psi(\boldsymbol{x},t), \tag{3}$$

によって達成された。ψ の波束が小さい固まりであるとき、その運動が Newton の法則に従うことが示された。場 $\phi(\boldsymbol{x},t)$ の量子化も同様にやりたい。

現行の Lagrange 式場の量子論は

$$\phi(\boldsymbol{x},t) \quad \to \quad \Psi[\phi(\boldsymbol{x}):t]$$

とする。Ψ はある時刻の、$\phi(\boldsymbol{x})$ を引数とする汎関数であって、時刻 t で場の空間分布が $\phi(\boldsymbol{x})$ となっていることの確率振幅である。これで確かに対応原理は満たすのだが、到底場の理論とは言えない。t と $\boldsymbol{x}$ とがバラバラに入っており Minkowski 空間でやる理論としては受け入れ難い（相対論的不変ではあるのだが)。

t と $\boldsymbol{x}$ が同等の資格で現れること、また式（３）をとくと眺めると、

$$\phi(\boldsymbol{x},t) \quad \to \quad \Phi(\phi,\boldsymbol{x},t) \tag{4}$$

が考えられる。Φ は ϕ などを変数に持つ関数である。汎関数ではない。現行の解釈で行けば場 $\phi(\boldsymbol{x},t)$ は時空点 $\boldsymbol{x},t$ で確定値を持たず、 Φ は場が ϕ という値を持つ確率振幅、ということになるだろう。しかし量子力学の真似をしただけではうまくいかない [2]。(4) 式の方式から直ちには対応原理が出てこない。

４次元的対応原理を満たさせるためには Φ の性格などにつきもう少し凝ったことをしなければならない。だがその前に粒子の量子力学に戻って、第１量子化の過程を考え直してみる。

4. 前期量子論

量子化とは何かを突き詰めて考えると、それは Newton 力学を量子力学に改めるというよりは、粒子とした電子を波とする、ということである。百年前 Niels Bohr は力学系に

図 1: 波と Bohr の量子条件

$$\oint p\mathrm{d}q = nh. \tag{5}$$

という条件を課した。Newton 力学の改革である。しかし電子を波とするならば、この条件は波が一回りして戻ったとき位相が合っている、つまり場が一価関数であるという当たり前の式なのである。(5) 式は電子の力学への条件というよりは、電子は波であると言っているのであった。

こうして導入された電子場の物理はすぐ作れる。電子場は負の電気を持つから、保存する電荷密度、電流密度が定義できなければならない。そのためには場 ψ は複素量でなければならない。その運動方程式は対応原理から決められる。Schrödinger 方程式を書くと、波束が粒子状の時はそれが Newton 方程式にしたがって運動することが示され (Ehrenfest の定理)、Schrödinger 方程式が正しいものと言える。電荷密度は

$$\rho\,(\boldsymbol{x},t) = -e\psi^*(\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t), \tag{6}$$

で与えられる。

光の放出についての Bohr の振動数条件

$$\frac{E_n - E_m}{\hbar} = \omega_n - \omega_m = \omega_{nm},$$

もすぐ出る [3]。場が

$$\psi = \phi_n(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-i\omega_n t},$$

の形のときは電荷密度は定数、光を出さない定常状態である。これに違う振動数の状態が僅かでも混ざると

$$\psi = \phi_n(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-i\omega_n t} + \phi_m(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-i\omega_m t},$$

電荷密度に

$$\rho = \mathrm{const.} + c\cos\{(\omega_n - \omega_m)t + \delta\},$$

のような振動項が生じ、振動数条件の光が放出される。こうして誘導放射（stimulated or induced emission ）が説明されるが、自発放射（ spontaneous emmision ）は第２量子化（光量子）が必要である。

振動数条件は光の吸収の際にも使える。さらに電子の終状態が連続スペクトル（自由電子）のときは光電効果の式になる。すなわち、電子が波であるならば光電効果は直ちに説明できるもので、量子論は必要ない。光量子が必要だったのは電子を粒子だと決め込んでいたからであった。Compton 散乱は外場のない自由空間での電子波と電磁波との衝突で、このときは振動数のほか空間的振動の波数が定義できる。これで Compton 効果が説明できる。

結局、電子の諸現象、エネルギースペクトル、振動数条件（Ritz の法則）、光電効果、Compton 効果など、そうして勿論干渉、回折現象は電子が波であることを示している。それを粒子電子で説明しようとすると、Newton 力学を書き改め、、電磁波を粒子にしなければならない。この処理を量子化と呼んだのは、電子のとりうるエネルギーが離散的になることからであろう。しかし有限の広がりの波ならばエネルギーが離散的になるのは当然であり、量子という言葉を持ち出す必要は全くない。場の古典論で済むことである。次節でこのことを、場の先輩である電磁場と比較して考える。

5. 古典場の理論

光の物理の変遷を考える。昔はそれは粒子の運動であった。しかしあまりにも速いので位置を見ることが出来ず、光線、すなわち点でなく直線で表された。媒質の境界面に入射するときは反射、屈折の法則に従う。これが幾何光学である。

しかし干渉、回折の現象が認められ、光は波となった。電磁場の振動であり、電磁場はベクトルポテンシャル $A_\mu(\boldsymbol{x}, t)$ で記述され、それは Maxwell の方程式に従う。見事なもので、古典場の理論の手本である。これから導かれる光の理論は波動光学と呼ばれるが、波長が短い場合は境界面で反射、屈折の関係式が導かれ、幾何光学に移行する。対応原理である。

電子は前々世紀末真空放電の陰極線として発見された。その外場内の運動が Newton の運動法則に従ったので、電子を負電荷を持つ粒子としたのは当然であろう。しかしその後の展開は粒子電子とは相容れないものであった。第一、負電荷の点状粒子では原子核に吸われてしまって安定な原子が出来ない。波とすれば良かったのだが、粒子に固執して前期量子論、行列力学と難しい理論を創ってしまった。門外漢の de Broglie （ 彼は大学で歴史を専攻した。波動説以外に物理の仕事はほとんどしていない ）の一声で波 $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ が導入されたが、電子は粒子と思いこんでいる人は ψ の意味が分からなかった。実在波でなく確率波と考えたのであった（これが間違いではないが)。

電子場 ψ は実在の c-数の場で、電磁場 A_μ と同列の古典物理の場である。ψ をど

うやって測るか？ 電荷密度が (6) 式で与えられるので電荷密度を測れば ψ の絶対値は決まる。その位相は直接は測れない。ある基準の波を与えればそれとの干渉で位相が決まる。

このように基準を与えてものを測るのは物理の常套手段である。電磁場 A_μ は、その渦だけが測れるのであって、A_μ 自身はゲージを与えて決まるものである。Newton 力学でも、測れるのは距離であって、位置 $\boldsymbol{x}$ は座標系を与えて始めて決まる。電子場も同様な事情であって古典物理量として十分の資格がある。

電子場 ψ を支配するのは Schrödinger 方程式で、電磁場の Maxwell 方程式と同列のものである。古典物理である。しかし Schrödinger 方程式を書くと

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi - e\phi\psi, \tag{6}$$

ただし ϕ は外場のスカラーポテンシャルで、$e\phi$ が電子の位置エネルギーである。この式を見ると $\hbar$ が入っている。故に量子論ではないか？ たしかに $\hbar$ は小さい（Avogadro 数に逆比例する）定数で、微視的世界を代表する量である。しかし（7）式の両辺を $\hbar$ で割ると、

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2(m/\hbar)}\nabla^2\psi - (e/\hbar)\phi\psi,$$

となって、現れる定数は小さくはない。Avogadro 数に無関係の量である。この方程式は巨視的な古典物理であって微視的な量子論ではない。

光も電子も粒子説から始まり、波動説となった。Maxwell, Schrödinger 方程式に支配される場の古典論である。しかしこれでは済まず、先に行かなければならない。場の量子化（第 2 量子化）が必要であった。光では Planck の空洞放射の理論から光量子が必要になった。電子でも素電荷の存在はかなり早い段階で知られ、多電子問題を扱うのに（7）式の古典方程式は全く無力である。

	粒子説	**場の古典論**	**場の量子論**
光	**幾何光学**	**Maxwell Eq.**	**光量子**
電子	**Newton 力学**	**Schrödinger Eq.**	**多電子の量力**

歴史的には電子場の古典論より前に多電子の量子力学（＝電子場の量子論）が出来てしまったので、古典場の段階がとばされてしまった。しかし Newton 力学 $\rightarrow$ 量子力学の飛躍は大きすぎる。量子力学が難しいといわれる所以である。論理的には物理学の体系は上表の様にあるべきである。量子物理の入門に当たっては先ず電子の古典場理論を学ぶべきであろう。電磁場の Maxwell 理論が分かったなら、同じ思考レベルで Schrödinge 方程式が理解できるはずである。

古典場を量子化するには、現行の方式は先ず多電子の量子力学を作り、ついで場を粒子の集団と書き直して量子力学を適用する。それをもっとスマートに、Minkowski 式にやりたいというのが本小論の出発点であった。

6. Einstein と量子論

Schrödinger 方程式による電子場の古典論と１電子の量子力学とは同等であることが Dirac によって示された。数学的には、一つのことを異なる表示で書いているにすぎない。物理的にも同様といいたいところだが、解釈の仕方が異なる。量力では観測に当たって確率解釈というものが必要である。

Einstein は確率解釈が理解できなかったようである。観測結果が確率でしか言えないというのは間違いだ、神々がサイコロを振るはずがない、と言ったたそうである。だが実験結果によれば、現行の確率解釈は正しく、Einstein の方が間違っているそうである [4]。

しかし彼の言う「神は賽を振らない」は正しいのではないか。電子の行動を記述するのに、量力でなくそれと同等の古典場でやっても良い。これなら確率解釈は必要ない。Schrödinger 方程式は時間について１階の微分方程式で、ある時刻の ψ を与えればその後の状態は完全に決まるという因果的なものである。確率が必要になるのは、電子は粒子である、粒子はその位置しか測れない、と思いこんでしまったときである。たとえ物理が量力で書かれていて物理量が q-数であっても、Heisenberg の運動方程式は因果的であり、神様は q-数を理解できるので確率とか賽は必要ない。q-数が全部分からないときに確率が必要になる。確率解釈は観測の問題であり、量力の本質的なものではない。

Einstein にはもう一つ言いたいことがある。１９０５年彼は光電効果を光量子で説明し量子論への道を広げた。彼はこの頃自発発光 (spontaneous emission）のことを考えていたので、光量子に至ったのは当然と言えるが、光電効果は光量子でなく古典電磁場でも電子が波であれば OK なのである [5]。もし Einstein がこのとき電子が波であるといったならば、その運動方程式（ Schrödinger 方程式 ）はすぐ作られただろう。そうして量子物理は２０年早く展開しただろう。もっとも多電子問題に移行するのに苦労したかもしれない。

7. 結語

正準量子化法、すなわち物理量を q-数として正準変数の間に交換関係を置くという理論はよくできていて、特に対応原理がたちどころに出てくるのが好ましい。しかしこの方法は時間 t を特別扱いにしているので、Minkowski 時空 $(\boldsymbol{x}, t)$ で考えようとする相対性原理と相容れない。それよりも理論が難しい。波動関数の物理的意味など容易には理解できないのではないか。

これと同値なことが、理論の改革（ Newton 力学 → 量子力学 ）でなく模型の変更（ 粒子 → 波動場 ）で達せられる。これならば相対論的に論じることが出来る。そうして易しいと思う。Dirac の相対論的電子論が成功したのは、この方式による。質点の相対論的運動方程式を正準量子化しようとしても手に負えない。こうして（(３）式によって）出来る古典場の理論は、我々の知っている言葉で言えば１体電子に対するものである。

２体電子に対しては

$$\boldsymbol{x}_1(t),\quad \boldsymbol{x}_2(t)\quad \rightarrow\quad \psi(\boldsymbol{x}_1, t_1; \boldsymbol{x}_2, t_2)$$

という８次元（同一時間では６＋１次元）空間を考えなければならない。しかしやたらに次元を増やす代わり場の量子化で行くべきである。正準量子化は８０年前から考えられているが、そうでなくて模型の変更（場 → ?) でやろうというわけである。これならば相対論的供変性は問題ないのだが、対応原理が直ちに出てこない。面白い問題である。

参考文献

[1] 宮沢弘成: サイエンス社 数理科学 **No. 459** (2001) 34,
http://www7.ocn.ne.jp/ miyazaw1/papers/batosituten.pdf.

[2] 菅原寛孝：
http://www.ns.kogakuin.ac.jp/ ft82039/tmp/prof_miyazawa/sugawara1.doc
も (3) 式と同様な量を考えた。しかし彼はこれを Lagrange 式に量子化したので、自由度の極めて多い力学系になってしまった。

[3] 宮沢弘成 : http://www7.ocn.ne.jp/ miyazaw1/papers/quantum.htm.

[4] たとえば H. Sakai, et al. Phys.Rev. Let. **97** (2006) 150405.

[5] このことは 40 年前に知られ、確立している。
W. E. Lamb, Jr. and M. O. Scully： Jubilee Volume in honor of Alfred Kastler (Presses Universitaires de France, Paris, 1969) p.363,