Ehrenberg-Siday-Bohm-Aharonov効果の物理的意味

宮沢 弘成
東京大学理学部
宮沢　透
学習院大学理学部

磁束が無限に長い円筒に閉じこめられているとき，周りの空間のベクトルポテンシャルを測って中の磁束の強さを知ることができるか？それを肯定する実験も報じられている．しかしベクトルポテンシャルは測定可能な量ではなく，それが測られたように見えたのは別の理由があったからである．その物理を考える．

1. 序

無限に長い円筒内に磁場が閉じこめられているとき，磁場に触れないでその存在を知り，磁束の大きさを測ることができるだろうか？ これが可能であると主張する Aharonov と Bohm[1)] の議論は次の通りである．

円柱の外では磁場は0だが，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は0ではない．位相のそろった電子のビームが $\boldsymbol{A}$ の中を進むと，波動関数の位相は $\boldsymbol{A}=0$ のときと比べて

$$\Delta\varphi = e\int_C \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

だけ変化する．右辺の $\int_C$ は，半古典的に考えた電子の経路に沿った線積分である．(電子の電荷を $-e$ とした.) 円柱に向かって入射する電子のビームを，円柱の手前のスリットで２つに分け，それぞれが円柱の一方の側と他方側を通るようにする．このように円柱を迂回した後，円柱の裏側で２つのビームを再び合流させる．このとき，２つのビームには

$$\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 = e\oint \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = e\Phi$$

の位相差がある．ここで $\oint$ は円柱の外側を一周する経路に沿った線積分であり，Φ は円柱内の磁束である．よって，円柱の両側を通った波の干渉から位相差を測れば磁束 Φ がわかる．

これが Aharonov-Bohm 効果と呼ばれるものである．しかし，Aharonov と Bohm より 10 年前に Ehrenberg と Siday[2] が同じ現象を扱い，電磁場でなくベクトルポテンシャルが測れるのは不思議である，と正しく問題提起をしている．そのため，ここでは彼らの名前も加えて Ehrenberg-Siday-Bohm-Aharonov 効果，略して ESBA(エスバ）効果と呼ぶことにする[3]．

２．Schrödinger 方程式とゲージ変換

電子のビームを２つに分けたりせずに，そのまま円柱にぶつけて散乱させても，本質的には同じことである．電子は磁場に全く触れていないにもかかわらず，散乱の様子は円柱内の磁束 Φ に依存して変化する．Aharonov と Bohm は，円柱の半径が０の極限での散乱微分断面積を具体的に計算した．それによると，微分断面積は Φ の周期関数であり，その周期は $2\pi/e$ である．したがって，電子がどの方向にどれだけの確率で散乱されるかを測定すれば，Φ を（$2\pi/e$ の整数倍を除いて）知ることができる．では，なぜそのようなことが起こるのか考えてみよう．

半径 R の無限に長い円柱内に磁束密度 B の一様な磁場が閉じこめられているとする．具体的には，円柱は無限に長いソレノイドで，そこに流れる電流によって中に磁場が作られていると考えればよい．全磁束は $\Phi = \pi R^2 B$ である．磁場の向きを z 方向とし，円柱の軸を z 軸とする円柱座標 (r, θ, z)（$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$）を用いると，$\boldsymbol{A} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}$ を満たすベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の θ, r, z 成分は

$$\begin{aligned} A_\theta &= \begin{cases} \Phi\, r/(2\pi R^2) & (r < R) \\ \Phi/(2\pi r) & (r > R) \end{cases} \\ A_r &= A_z = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

のようにとれる．（$A_\theta = -A_x \sin\theta + A_y\cos\theta$，$A_r = A_x\cos\theta + A_y \sin\theta$.）ソレノイドは電子を通さない壁で覆われており，電子は円柱の内部に入ることができないとする．

円柱外の電子の運動を記述する Schrödinger 方程式を考える．ハミルトニアンは

$$H = -\frac{1}{2\mu}\left(\nabla + \mathrm{i}e\boldsymbol{A}\right)^2 \tag{2}$$

である．（電子の質量を μ とし，$\hbar = c = 1$ とする．）定常状態の Schrödinger 方程式 $H\psi = E\psi$（E はエネルギー）を円柱座標で書き直し，(1) を代入すると

$$-\frac{1}{2\mu}\left[\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\beta\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\psi = E\psi \tag{3}$$

となる．ここで，

$$\beta = \frac{e\Phi}{2\pi}$$

と β を定義した.（今は円柱の外を考えているので，$A_\theta = \Phi/(2\pi r) = \beta/(er)$ である.）決まったエネルギーを持つ電子の波動関数 ψ は，(3) を適当な境界条件のもとで解くことによって得られる．電子は円柱内に入れないとしているので，円柱表面での境界条件は $\psi(r=R)=0$ である．

一般に，Schrödinger 方程式は

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \nabla\chi, \qquad \psi \to \exp(-\mathrm{i}e\chi)\psi \tag{4}$$

（χ は任意の関数）というゲージ変換のもとで形を変えない．このことを利用して，円柱外でのベクトルポテンシャルを消すことができる．それには，(4) で $\chi = -(\beta/e)\theta$ とすればよい．実際，

$$\tilde{\psi} = \psi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\theta} \tag{5}$$

とおき，(3) を $\tilde{\psi}$ を使って書き直すと，β を含む部分は消えて

$$-\frac{1}{2\mu}\nabla^2\tilde{\psi} = E\tilde{\psi} \tag{6}$$

となる．

注意しなければならないのは，いま我々は $r > R$ の領域だけを考えているということである．$\chi = -(\beta/e)\theta$ のゲージ変換は z 軸上で特異であるので，この変換は z 軸を含む通常の空間では許されない．今は円柱外の領域のみを考えているので，このような特異なゲージ変換が許されるのである．このゲージ変換によって円柱外でのベクトルポテンシャルは 0 になるが，このとき円柱内のベクトルポテンシャルはどうなるか，ということは考える必要はないし，考えてはいけない.（もし納得がいかなければ，これをゲージ変換だと思わずに，単に $\tilde{\psi}$ を (5) によって定義しただけだと思えばよい.）

(6) は自由粒子の Schrödinger 方程式と同じであり，電磁場の情報は全く含まない．それでは ESBA が主張する磁束依存性はどこに行ってしまったのかというと，それは θ 方向の境界条件にある．変換前の波動関数 ψ は位置 $\boldsymbol{r}$ の連続な一価関数であるから $\psi(\theta+2\pi) = \psi(\theta)$ を満たすが，これと $\tilde{\psi}$ の定義式 (5) から

$$\tilde{\psi}(\theta+2\pi) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\beta}\tilde{\psi}(\theta) \tag{7}$$

となる．つまり，z 軸のまわりを一周したとき（β が整数でない限り）$\tilde{\psi}$ は元の値に戻らず，位相因子 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\beta}$ がつく．これが θ 方向の境界条件である．具体的に，θ の範囲を $0 \le \theta < 2\pi$ とすると，(7) は正の x 軸上（$\theta = 0$）における境界条件

$$\lim_{\theta\uparrow 2\pi}\tilde{\psi}(\theta) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\beta}\lim_{\theta\downarrow 0}\tilde{\psi}(\theta), \qquad \lim_{\theta\uparrow 2\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}\tilde{\psi}(\theta) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\beta}\lim_{\theta\downarrow 0}\frac{\partial}{\partial\theta}\tilde{\psi}(\theta) \tag{8}$$

を意味する.（これは，正の x 軸上において，位相因子 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\beta}$ を除いて $\tilde{\psi}$ が滑らかにつながるという条件である．正の x 軸上で位相が不連続になっているのは，$0 \le \theta < 2\pi$

と決めたからにすぎず，物理的な意味はない．別の範囲で θ を定義すれば，別の場所に切れ目が入る．）このように，$\tilde{\psi}$ を求めるには，r 方向の境界条件 $\tilde{\psi}(r=R)=0$ と θ 方向の境界条件 (7)（または (8)）のもとで (6) を解くことになる．β に依存する境界条件のもとで解いているのだから，解が β に（したがって磁束 Φ に）依存するのは当たり前のことである．（解の具体的な形は第 4 節で見る．）

ESBA 効果で磁束依存性が現れるのは，境界条件 (7) に β という量が含まれているためである．このことの物理的な意味を次に考える．

3. 磁束の変化と角運動量

円柱内の磁場は外からは見えないのだが，円柱内の磁場が変化するときは，円柱外にも電磁場が生じる．したがって，円柱内の磁束 Φ 自体は観測できないが，Φ の変化は外部で観測できる．円柱の外にある電子は電磁場によって θ 方向に加速される．Faraday の言葉によれば，磁場が増加するためには磁力線が遠方から円柱内に入り込まねばならない．円柱に向かって進む磁力線が電子のそばを通過するとき，電子を θ 方向に加速するのである．

まず，古典力学で考える．電磁場の変化は軸対称に起きるとする．（ソレノイドに流れる一様電流の大きさを変えて中の磁束を変化させる場合は，電磁場の変化は軸対称である．）円柱外に生じる電場は θ 方向，磁場は z 方向であるので，それぞれを E_θ，B_z と書く．円柱外にある古典電子が電磁場から受ける力は $-eE_\theta+ev_rB_z$ であり，力の向きは θ 方向である．（v_r は電子の速度の r 方向成分．）この電子の z 軸からの距離を $\rho(t)$ とする．電子の角運動量 L の時間変化は，電磁場から受ける力のモーメントに等しいから，

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=-\rho eE_\theta(\rho)+\rho ev_rB_z(\rho) \tag{9}$$

である．（角運動量は z 成分のみを考える．）右辺の第 1 項は，電場の対称性を考慮し，さらに Stokes の定理と

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

を用いると，

$$-\rho eE_\theta(\rho)=\frac{-e}{2\pi}\oint_{r=\rho}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{-e}{2\pi}\iint_{r\le\rho}\mathrm{rot}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\frac{e}{2\pi}\iint_{r\le\rho}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{10}$$

と変形できる．ここで，$\oint_{r=\rho}$ は半径 ρ の円を一周する経路での線積分，$\iint_{r\le\rho}$ は半径 ρ の円の内部での面積分を表す．一方，z 軸を中心とした半径 r の円の中の磁束を $\phi(r)$ とする．このとき，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(\rho)=\frac{\partial}{\partial t}\phi(\rho)+v_r\frac{\partial}{\partial\rho}\phi(\rho) \tag{11}$$

である．右辺第 1 項は，ρ を固定したときの $\phi(\rho)$ の時間微分である．右辺第 2 項で

は $v_r = \mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t$ を使った．また，

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\rho) = \iint_{r\leq\rho} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}, \qquad \frac{\partial}{\partial \rho}\phi(\rho) = 2\pi\rho B_z(\rho) \tag{12}$$

であることは容易にわかる．以上の (9)∼(12) 式より，

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(\rho) \tag{13}$$

が得られる．

時刻 t_0 と時刻 t_1 の間に円柱内（$r < R$）の磁束が 0 から Φ まで増加し，時刻 t_1 以後は Φ のまま変わらないとする．時刻 t_0 での角運動量が L_0 だったとして (13) の両辺を時刻 t_0 から任意の時刻 $t > t_1$ まで積分すると，$L = L_0 + (e/2\pi)\phi(\rho)$（$\rho$ は時刻 t での電子の位置）となるが，時刻 $t > t_1$ では磁場は円柱内にしか存在しないので $\phi(\rho) = \phi(R) = \Phi$ である．これを β を使って書くと

$$L = L_0 + \beta \tag{14}$$

となる．すなわち，円柱内の磁束が 0 から Φ に増加するとき，電子の角運動量は β だけ増えることがわかる．これは，電子の初期位置によらない．どれだけ電子が円柱から離れていても，角運動量は常に β だけ増える．したがって，磁束が 0 の時の電子の角運動量 L_0 さえ知っていれば，その後の角運動量を測定することによって中の磁束の大きさを知ることができる．

同じことを量子力学で考えてみよう．まず最初に，量子力学における角運動量について定義しておく必要がある．位置座標 $\boldsymbol{r}$ と正準交換関係を満たし，$\boldsymbol{p} = -\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla}$ で表現される量 $\boldsymbol{p}$ を正準運動量（canonical momentum）と呼ぶ．これはゲージ変換で不変でない．一方，$\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A}$ は質量 × 速度を表す観測可能な量であり，ゲージ不変である。これを力学的運動量（mechanical momentum）と呼ぶ． 同様に，$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ を正準角運動量，$\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A})$ を力学的角運動量と呼ぶ．以下では，x-y 平面上の運動のみに注目し，角運動量は z 成分のみを考える．θ についての微分演算子を用いると，正準角運動量は $-\mathrm{i}\partial/\partial\theta$，力学的角運動量は $-\mathrm{i}\partial/\partial\theta + erA_\theta$ で表される．（ここでは電子のスピンは考えない．「角運動量」というのは常に軌道角運動量のことである．）

電子の存在する領域が $r > R$ に限定されているときは，波動関数が $\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta)$ を満たすべき数学的理由はない．しかし，円柱内の磁束が 0 のときは，円柱がないときと何も状況が変わらないので，通常の空間と同様に $\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta)$ が成り立つことは物理的に明らかである．電流が流れていないソレノイドを普通の空間に置いただけでは，円柱内に特異性が生じるはずがない．ここで，ソレノイドに電流を流すと，ψ は Schrödinger 方程式に従って時間変化するが，$\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta)$ という境界条件が変わることはない．したがって，円柱内の磁束が 0 でなくても，((5) のような特異なゲージ変換をしない限り）波動関数は $\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta)$ を満たす．

円柱がくり抜かれた空間では，ベクトルポテンシャルが 0 でなくても，正準角運動量と力学的角運動量が同時に決まった値を持つことが可能になる．$\psi(\theta+2\pi) = \psi(\theta)$

という条件により，正準角運動量が取りうる値は整数に限られる．一方，力学的角運動量は任意の実数値を取ることができる．連続値を取る力学的角運動量と離散値しか取れない正準角運動量との差額をベクトルポテンシャルが埋めているのである．ベクトルポテンシャルが 0 のときは，正準角運動量と力学的角運動量は等しい．したがって，円柱内の磁束が 0 のときは，力学的角運動量も整数値しか取れない．

ベクトルポテンシャルが時間変化するとき，電子の波動関数 ψ は Schrödinger 方程式 $\mathrm{i}(\partial/\partial t)\psi = H\psi$ に従って時間発展する．ハミルトニアン H は (2) で与えられる．力学的角運動量 $L = -\mathrm{i}\partial/\partial\theta + erA_\theta$ の期待値の時間微分は，Schrödinger 方程式より

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\langle \psi,\, \Big(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\theta} + erA_\theta\Big)\psi \Big\rangle = \langle \psi,\, er\dot{A}_\theta\psi\rangle + \Big\langle \psi,\, \Big[H,\, \frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{i}erA_\theta\Big]\psi \Big\rangle$$

となる．$\boldsymbol{E} = -(\partial/\partial t)\boldsymbol{A}$ だから，右辺第 1 項の中の $\dot{A}_\theta$ は $-E_\theta$ に等しい．また，右辺第 2 項の中の交換子を計算すると，$(e/2)(v_r rB_z + rB_z v_r)$ に等しいことがわかる．ただし，

$$B_z = \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}, \qquad v_r = \frac{-i}{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} + \mathrm{i}eA_r\right)$$

である．つまり

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi, L\psi\rangle = -e\langle\psi, rE_\theta\psi\rangle + \frac{e}{2}\ \langle\psi, (v_r rB_z + rB_z v_r)\psi\rangle \tag{15}$$

が得られる．期待値に限らず，任意の行列要素 $\langle\phi, L\psi\rangle$ についても (15) と同じ式が成り立つ．この式は，v_r と rB_z が可換でないことを除けば，古典力学の式 (9) と同じである．このように，力学的角運動量の時間変化は，ベクトルポテンシャルでなく電磁場によって記述できる．

前と同様，円柱内の磁束は時刻 t_0 と時刻 t_1 の間に 0 から Φ まで増えるとしよう．ベクトルポテンシャルは時刻 t_0 では 0 で，時刻 t_1 では $A_\theta = \Phi/(2\pi r)$（$A_r = A_z = 0$）になる．電磁場の変化は軸対称であり，ベクトルポテンシャルは θ によらない形で時間変化すると仮定する．

時刻 t_0 で，電子は決まった角運動量を持っていたとする．このとき，電子の波動関数の θ 部分は $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}$（$m$ は整数）という形をしている．この電子の正準角運動量は m であり，力学的角運動量も同じく m である．円柱内の磁束を増やしていくとき，$\boldsymbol{A}$ が θ によらないので，ハミルトニアン H も θ によらない．したがって，$[H, \partial/\partial\theta] = 0$ が成り立ち，正準角運動量演算子はハミルトニアンと交換する．それゆえ，この状態の正準角運動量は時間によらず m のままである．波動関数の r 部分は時間とともに変わるが，θ 部分は $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}$ のまま変わらない．時刻 t_1 に磁束が Φ になったとき，正準角運動量は m のままだが，ベクトルポテンシャルは $A_\theta = \Phi/(2\pi r)$ になっているから，力学的角運動量は $m + erA_\theta = m + \beta$ になっている．つまり，磁束が 0 から Φ まで増えると電子の力学的角運動量は β だけ増える．これは古典力学の場合と全く同じで，電子が電磁場によって θ 方向に加速されるためである．

電磁場の時間変化が軸対称でない場合は，少し話が複雑になる．このときは，正準角運動量が一定に保たれるとは限らない．磁束が Φ になった後の時刻 $t > t_1$ にお

いて，電子の状態は，いろいろな正準角運動量の値を持つ状態の重ね合わせとなる．しかし，正準角運動量の値が整数であることには変わりない．よって，時刻 $t > t_1$ の電子の状態は,「整数 $+\beta$」の力学的角運動量を持つ状態の重ね合わせになっている．β が整数でないとき，時刻 $t > t_1$ で電子の力学的角運動量を測定すれば，その非整数部分から β の非整数部分を知ることができる．つまり，円柱内の磁束を，$2\pi/e$ の整数倍を除いて知ることができる．

電磁場が軸対称でない形で変化する場合，古典力学では，点電荷は磁束の変化を正しく計測することができない．その電荷の場所を通らないで円柱に入り込む磁力線を捉えることができないからである．したがって，この場合は，点電荷の角運動量の変化を観測しただけでは磁束の変化を知ることはできない．古典力学で非対称な磁束の変化を正しく計測しようと思ったら，点電荷ではなく，円柱を取り囲む数珠のようなものを考える必要がある．量子力学では，この点は簡単である．古典力学での点電荷とは異なり，電子の波動関数は広がっていて円柱を包み込んでいる．そのため，磁束の変化が非対称な形で起きても，円柱に入り込む磁力線をすべて把握することができ，中の磁束の情報を正しく持つことができるのである．

普通,「電子の状態」という言葉は波動関数と同義語のように使われている．しかし，上の例からも明らかなように，波動関数を知っただけでは本当に電子の物理的状態がわかったとは言えない．力学的角運動量の情報の一部はベクトルポテンシャルが持っているので，電子の状態を指定するには波動関数とベクトルポテンシャルの両方が必要となる.「$A_\theta = \Phi/(2\pi r)$ である」というのは「電子の力学的角運動量が β だけ増えている」というのと同じ意味である．この場合，ベクトルポテンシャルは（円柱の外のことだけを考えれば）専ら電子の状態について記述していることになる．

電子の状態を波動関数だけで表すには，(5) の変換をして，ベクトルポテンシャルが 0 のゲージに移行すればよい．このゲージでは，波動関数は $\tilde{\psi}(\theta + 2\pi) = \tilde{\psi}(\theta)$ を満たす必要はなく，正準角運動量が整数になる必要もない．正準角運動量は力学的角運動量と等しく，任意の実数値を取る.「角運動量が $m + \beta$ の状態」は，波動関数の θ 部分が $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+\beta)\theta}$ になる．これを見れば，角運動量が β 増えていることは一目瞭然である．これが (7) 式に含まれる β の意味である．

4. 散乱問題の解

Schrödinger 方程式の解について，もう少し詳しく見てみよう．ただし，x-y 平面上の運動のみを考え，解は z に依存しないとする．

決まったエネルギーと決まった角運動量を持つ状態の波動関数は，Bessel 関数 J_ν, N_ν を使って

$$\psi^{\beta}_{k,m}(r, \theta) = \left[N_{|m+\beta|}(kR) J_{|m+\beta|}(kr) - J_{|m+\beta|}(kR) N_{|m+\beta|}(kr) \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} \tag{16}$$

（m は整数，k は実数）と書き表せる．これは定常状態の Schrödinger 方程式 (3) の解で，境界条件 $\psi^{\beta}_{k,m}(R, \theta) = 0$ を満たしている．この状態のエネルギーは $E = k^2/(2\mu)$,

正準角運動量は m である．また，このときのベクトルポテンシャルは $A_\theta = \beta/(er)$ なので，この状態の力学的角運動量は $m+\beta$ である．

Aharonov と Bohm は散乱問題を時間によらない形式で考えたが，ここでは時間に依存する形式で議論する．今までと同じく，円柱内の磁束は時刻 t_0 以前では 0 で，時刻 t_0 と時刻 t_1 の間に 0 から Φ まで変化し，時刻 t_1 以後は Φ で一定だとする．時刻 t_0 における電子の波動関数を ψ_0 とすると，ψ_0 は $\psi^0_{k,m}$ の重ね合わせで

$$\psi_0 = \int_0^\infty \mathrm{d}k \sum_m C_{k,m}\psi^0_{k,m} \qquad (C_{k,m}\text{は定数}) \tag{17}$$

と書き表せる．時刻 t_0 と時刻 t_1 の間に電子は電磁場によって加速され，力学的角運動量が変化する．時刻 t_1 における波動関数 ψ_1 は

$$\psi_1 = \int_0^\infty \mathrm{d}k \sum_m D_{k,m}\psi^\beta_{k,m} \qquad (D_{k,m}\text{は定数}) \tag{18}$$

と書ける．(17) と (18) を見比べただけでは，ψ_0 と ψ_1 との違いはわからない．これは単に展開の基底を変えただけのようにも見える．(実際，ψ_1 を $\psi^\beta_{k,m}$ でなく $\psi^0_{k,m}$ で展開することも可能である．) しかし，前節の最後でも述べたように，電子の状態を知るには波動関数とベクトルポテンシャルの両方を見る必要がある．時刻 t_0 ではベクトルポテンシャルが 0 だが，時刻 t_1 では $A_\theta = \beta/(er)$ である．したがって，時刻 t_0 の電子が整数の力学的角運動量を持つ状態の重ね合わせであるのに対し，時刻 t_1 では「整数 $+\beta$」の力学的角運動量を持つ状態の重ね合わせになっている．このことは，ベクトルポテンシャルを 0 にしたゲージで見るとわかりやすい．(5) の変換を行ってベクトルポテンシャル 0 のゲージに移ると，時刻 t_1 での波動関数は

$$\tilde\psi_1 = \int_0^\infty \mathrm{d}k \sum_m D_{k,m}\tilde\psi^\beta_{k,m}, \qquad \tilde\psi^\beta_{k,m} = \psi^\beta_{k,m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\theta} \tag{19}$$

である．$\tilde\psi^\beta_{k,m}$ の θ 部分は $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+\beta)\theta}$ という形をしており，これが「角運動量 $m+\beta$ の状態」であることは明らかである．それぞれの $\tilde\psi^\beta_{k,m}$ と同様，$\tilde\psi_1$ は境界条件 $\tilde\psi_1(\theta+2\pi) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\beta}\tilde\psi_1(\theta)$ を満たす．電磁場に加速されて角運動量が増えたことにより，θ 方向の境界条件が ψ_0 とは別のものになっていることがわかる．

時刻 t_1 以後は，磁束が一定だから，ベクトルポテンシャル 0 のゲージで波動関数の時間変化を追うことができる．波動関数は自由粒子と同じ Schrödinger 方程式 $\mathrm{i}\partial\tilde\psi/\partial t = -(1/2\mu)\nabla^2\tilde\psi$ に従って時間発展する．$\tilde\psi^\beta_{k,m}$ が決まったエネルギー $k^2/(2\mu)$ を持つことを使うと，任意の時刻 $t > t_1$ における波動関数 $\tilde\psi$ は，(19) の $\tilde\psi_1$ の中の $\tilde\psi^\beta_{k,m}$ を $\tilde\psi^\beta_{k,m}\exp[-\mathrm{i}k^2(t-t_1)/(2\mu)]$ で置き換えて

$$\tilde\psi = \int_0^\infty \mathrm{d}k \sum_m D_{k,m}\tilde\psi^\beta_{k,m}\exp[-\mathrm{i}k^2(t-t_1)/(2\mu)] \tag{20}$$

と求められる．

ESBA効果の散乱問題では，磁束が一定値になった後のことを考えるので，時刻 t_1 における状態，すなわち $\tilde{\psi}_1$ が「初期条件」として扱われる．入射電子の波動関数として $\tilde{\psi}_1$ を与えて，時間が十分経った後での $\tilde{\psi}$ の様子を調べるのが散乱問題の目的である．しかし，上で見てきたように，時刻 t_1 における状態 $\tilde{\psi}_1$ は真の初期状態ではなく，磁束の増加による影響を受けた後のものである．時刻 t_0 と時刻 t_1 の間にこの電子は電磁場から力を受け，角運動量が変化している．このため，我々は時刻 t_1 における「初期条件」を自由に決めることはできない．$\tilde{\psi}_1$ は「力学的角運動量が整数 $+\beta$ の状態」の重ね合わせでなければならず，β の値は過去の履歴によって決められてしまっている．ベクトルポテンシャル0のゲージでは，この制約は境界条件に現れている．すなわち，$\tilde{\psi}_1$ は境界条件 $\tilde{\psi}_1(\theta+2\pi)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\beta}\tilde{\psi}_1(\theta)$ を満たさねばならない．この条件は時刻 t_0 と t_1 の間に受けた力によって決められていて，勝手に変えることはできない．

θ の領域を $0\le\theta<2\pi$ と定義すると，$\tilde{\psi}_1$ が満たす θ 方向の境界条件は，正の x 軸上における条件 (8) で具体的に与えられる．また，r 方向の境界条件は,「$r=R$ で波動関数が0」である．$\tilde{\psi}_1$ と同様に，任意の時刻における $\tilde{\psi}$ も，これらの境界条件に従う．境界条件を除けば，$\tilde{\psi}$ の運動は自由粒子と同じである．

電子が $\theta=\pi$ の方向（x の負の側）から円柱に向かって入射するとしよう．入射速度を v_1 とする．このとき，運動量は $p_1=v_1/\mu$ である．この電子は負の x 軸に沿って速度 v_1 で進み，円柱に衝突して散乱される．電子が角度 θ の方向に散乱される割合を表すのが，微分断面積 $\sigma(\theta)$ である．

決まった運動量 p_1 を持つ状態の波動関数は平面波 $C\exp(\mathrm{i}p_1x)$ であるが，これは必要な境界条件を満たしていない．しかし，実際の入射電子の波動関数は空間的に局在した波束であるから，完全に決まった運動量を持つわけではない．いま考えている入射電子の波動関数は，波束の中心付近では平面波 $C\exp(\mathrm{i}p_1x)$ とほとんど同じ形をしているが，空間全体には広がっておらず，負の x 軸上のある点を中心として局在している．このような波束は，β の値に関わらず，$\tilde{\psi}^{\beta}_{k,m}$ の重ね合わせで作ることが可能である．波束が円柱から十分離れていれば，正の x 軸上（および円柱の表面上）での波動関数の値はほとんど0であるから，境界条件は制約とならない.（今はベクトルポテンシャル0のゲージで考えているので正準運動量と力学的運動量の区別がないが，ここで「決まった運動量」と言っているのは「決まった力学的運動量」のことである．元のゲージ (1) で考えると,「決まった力学的運動量 p_1 を持つ状態」は平面波ではなく $C\exp(\mathrm{i}p_1x-\mathrm{i}\beta\theta)$ である.）

このように，β がどんな値であっても，(19) の係数 $D_{k,m}$ をうまく選ぶと，$\tilde{\psi}_1$ は速度 v_1 の入射粒子を表す波束となる．その後の波束の運動を表すのが，(20) の $\tilde{\psi}$ である．円柱に衝突するまでは，$\tilde{\psi}$ は速度 v_1 で円柱に向かって進む波束である．β の値によって境界条件が違うが，衝突以前の $\tilde{\psi}$ は正の x 軸上でほとんど0であるから，β による違いは無視できる．しかし，波束が円柱に衝突して波動関数が円柱を取り巻くようになると，境界条件の影響が大きくなる．その結果，衝突以後の $\tilde{\psi}$ は β によって異なり，散乱の微分断面積には β 依存性が現れる．これが散乱のESBA効果である．干渉パターンに磁束依存性が現れるのも，これと同じ理屈である．

(7) 式の右辺は β について周期 1 の周期関数であるから，磁束が Φ のときと $\Phi + 2j\pi/e$（j は整数）のときでは境界条件が同じであり，したがって，散乱断面積も同じである．つまり，散乱断面積は Φ の周期関数で，周期は $2\pi/e$ である．(16) からわかるように，j が整数のときは $\tilde{\psi}^{\beta+j}_{k,m} = \tilde{\psi}^{\beta}_{k,m+j}$ であり，基底関数系 $\{\tilde{\psi}^{\beta+j}_{k,m}\}$ と $\{\tilde{\psi}^{\beta}_{k,m}\}$ は同じである．これは「力学的角運動量が整数 $+j+\beta$ の状態の重ね合わせは，力学的角運動量が整数 $+\beta$ の状態の重ね合わせと同じである」という自明なことを言っているだけだが，円柱外の物理が β の非整数部分のみに依存するということは，これからも明らかである．

6. 場の理論による解釈

磁束の増加をを入射電子が記憶していることによって ESBA 効果が起きる，というのが前節までの結論である．電子の波動関数は円柱を取り巻いており，円柱に入り込む磁力線をすべて捉えて，円柱内の磁束の変化を記録することができる．しかしこれは，数学の問題として理想化された量子力学での話である．実際の物理では，そのように単純にはいかない．

まず第一に，前節の議論では，入射電子は無限遠から飛んできて，円柱に衝突するまでの途中で磁束の変化を感じる，という状況を想定している．これは現実には合わない．入射電子は，射出するまで電子銃の中にある．この電子は陰極内に束縛されており，これに外から力を加えて射出するわけだから，前節で考えた状況とは大きく異なる.（しかも，電子銃は，磁束が Φ になった時刻 t_1 より後に他所から持ち込まれたかもしれないのである.）

仮に電子が真空中を無限遠から飛んできたとしても，この入射電子が磁束の変化を記憶しているというのには物理的に無理がある．円柱からマクロな距離だけ離れた入射電子の波動関数は，円柱付近では極めて小さい．数学的にはゼロではないが，ここまで量子力学が正確に成り立つとは考えられない.（たとえば重力の影響の方がはるかに重要となる.）したがって，磁束が変化するとき，入射電子が磁力線の通過を正しく数え上げることは物理的に不可能だと思われる．

これらの疑問点は，一体の量子力学でなく場の理論で考えれば解消する．磁束の変化を記憶しているのは，個々の電子ではなく，電子の場なのである．

場の理論では，円柱の周りに真空揺動によって電子，陽電子が生成されている．(16) で与えられられるような完全系のすべての状態に（小さい確率だが）仮想電子が存在する．これは宇宙の始まりから存在しているので，その後円柱に入り込んだ磁束はすべて捉えている．磁束が 0 から Φ まで増えるとき，これらの仮想電子は電磁場によって加速されて力学的角運動量が増える．こうして，電子の場は円柱内の磁束の変化を記憶する．個々の電子は場の励起であるから，入射電子が取りうる角運動量の値は，射出される前から場によって決められている．そのため，磁束が増えたときに入射電子が置かれていた状況に関係なく，ESBA の干渉は生じる．

7. 結論

円柱内の磁束が0からΦまで増える間に，円柱外に電磁場が生じ，電子をθ方向に加速する．その結果，整数であった電子の力学的角運動量は「整数$+\beta$」に変化する．これがESBA効果の物理的な正体である．電子（正確に言うと，電子の場）は，宇宙が始まってから現在までの磁束の増加を力学的角運動量の変化として記憶しており，それが散乱断面積や干渉パターンなどのβ依存性として観測される．

円柱内の磁束がΦ増えたときに外の電子の角運動量がβ増える，という現象は古典力学でも説明できる．しかし，古典力学と量子力学には大きな違いがある．それは，量子力学では（通常の空間において）角運動量が整数値しか取れないということである．古典力学では，外の電子の角運動量を観測して中の磁束を知るには，磁束0のときの角運動量（(14)式のL_0）を知っていなければならない．しかし，量子力学では，磁束0のときの力学的角運動量は整数に限られる．初期条件を何も知らなくても，現在の電子の力学的角運動量を観測して非整数値が得られたなら，その非整数部分は磁束の変化に由来するものであり，$e\Phi/(2\pi)$の非整数部分に等しいことがわかる．

また，古典力学では，過去に電磁場によって加速されたことを電子が永遠に記憶しているというのは不可能である．他の粒子などとの相互作用によって電子の角運動量は変化し，過去の記憶は失われてしまう．しかし，量子力学では事情が違う．量子力学では，角運動量の授受は整数単位で行われる．角運動量の非整数部分は，(7)式に見られるように「空間のねじれ」の形で記憶されており，これは中の磁束が変わらない限り変わることはない．この意味において，ESBA効果は量子力学に特有のものであるといえる．

量子力学における角運動量は，通常の空間では整数値しか取れないが，円柱外に限定された領域では任意の実数値を取れる．上で述べたように，このことがESBA効果では大きな意味を持つ．一般に，円柱外の電子の状態は，決まった力学的角運動量$m_1, m_2, m_3, \ldots$を持つ状態の重ね合わせになっている．それぞれのm_iは整数とは限らない．しかし，m_iとm_jの差は常に整数である．力学的角運動量が非整数値だけ異なる状態が混ざり合うことはない．m_iは「整数$+\alpha$」（$0 \leq \alpha < 1$）であり，αはすべてのiに共通である．電子の状態はαの値によって別のクラスに分類され，その物理的挙動はαによって異なる．αの値を決めているのは，電子が過去に電磁場から受けた力の履歴である．だが，過去のことを何も知らなくても，ベクトルポテンシャルを見ればαの値は一目でわかる．（そして，αは$\beta = e\Phi/2\pi$の非整数部分に等しい．）電子の挙動がベクトルポテンシャルによって決められているように見えるのは，このためである．

言うまでもなく，量子力学で電子の運動を記述するにあたって，ベクトルポテンシャルが果たす役割は非常に大きい．しかし，「量子力学では電子は電磁場ではなくベクトルポテンシャルから力を受ける」などと考えるのは正しくない．ESBA効果は電磁場による力だけで説明できる．ベクトルポテンシャルは，あくまでも「便利な道具」なのである．

参考文献

1) Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. **115** (1959), 485.

2) W. Ehrenberg and R. E. Siday, Proc. Roy. Soc. London, **B62** (1949), 8.

3) この命名は John Bell による．１９８６年秋著者の１人（H.M.) は J.B. とこの問題について議論した．Ehrenberg と Siday の寄与を主張し，Ehrenberg-Siday-Bohm-Aharonov 効果と言うべきである．しかし長すぎるのでので，ESBA と言えば語呂も良いと話した．

4) . Tonomura et al., Phys. Rev. Lett. **56** (1986), 792.