場と質点

サイエンス社　*数理科学*　No.459、2001年９月号　34ページに
特集　点、粒子、場　その数理と物理イメージ　の一部として掲載されたものを修正して転載する。

場と質点

宮 沢　弘 成

1. はじめに

自然界の現象を書き表すのに、ものが動くという見方と、状態がこうであるという言い方がある。「本が机の上にある」と言うのと「机の上に本がある」とは同じことであるが、考え方は違う。前者は本に、後者は机の上に注目しているのであって、時間的発展を見れば差は明らかである。次の時刻では「本は書棚に納められた」、「机の上にノートとペンがある」のように違ってくる。これが「もの」と「場」の見方である。ものの大きさが無視できるときは点で位置を指定でき、質点と呼ばれる。大きさを考慮するときは質点の集まりとして記述する。

物理学はニュートンの質点系の力学に始まり、現在場の理論と呼ばれるものを含むようになったが、場の量子論は矛盾を含み、未完成である。この間に場と質点の考え方がどのように用いられ、発展してきたかを考える。古典物理において、量子物理において、それがどのように扱われたか、将来どうなるかが問題である。

2. 質点系と場

もう一度ものの運動と状態の変化という二つの見方を比較検討してみる。元日の東京盛り場の人出を調べるには次のようにする。まず東京在住者各人の行動を記録する。Aは午前明治神宮へ詣り、午後新宿へ行って帰宅した。Bは寝坊し午後明治神宮、夜銀座へ行った。$\cdots\cdot$ 。これを在住者全員に対して並べ上げれば完璧であるが、あまりにも不必要な情報が多すぎる。紙に書けば一千万行であり、新聞紙には入りきらない。

代わりに用いられる記述法は、明治神宮に午前何人行ったか、午後何人か、新宿、銀座はどうか、というやり方である。場所、時刻を指定してその状態を調べるのである。これならば少ない量の情報で盛り場の様子を知るという目的は達せられる。ただしこの際人間は誰であっても区別しない。同種として扱う。より詳しくするために男女を区別したり、子供、大人を分けたりすることができる。

ものが動く様子は時刻 t を独立変数として $x(t)$ で表される。x は位置を示す変数で、３次元空間内の点ならば３次元ベクトル（座標系を導入すれば３個の実変数）である。これに対し場は、時刻 t、位置 x を変数とする多変数関数 $\varphi(x,t)$ で表される。つまり質点系は関数の組

$$x_i(t), \quad i=1,\cdots N, \tag{1}$$

で与えられるものであり、場は

$$\varphi_\alpha(x,t), \quad \alpha=1,\cdots n, \tag{2}$$

で表される対象である。ここで N は質点の数、n は場の種類を表す。質点系の運動方程式は時刻について２階の連立微分方程式であり、場では偏微分方程式となる。

ニュートンが見た落ちるりんごはまさに $x(t)$ であるが、彼の力学が成功したので、何でも質点系でいこうとしたのは当然である。連続体も微小部分に分け、質点の集まりとし、その運動を追跡する。こうして固体の運動などはうまく説明される。しかし、変形する連続体に対してはこれが最良のやり方ではなく、もっとうまい手段があった。こうして場の考えが物理に登場する。

変形する連続体で最も簡単なものは弦の振動であろう。弦の静止状態を x-軸にとり、点 x 付近の微小部分を質点とし、その変位を y とする。弦の伸びは無限小なので x 方向の変位はない。運動状態は $y_x(t)$ で表される。一方弦の振動を場として表すこともできる。座標 x における弦の y-座標を与えればよく、$y(x,t)$ と書ける。これらは同じものである。

$$y(x,t) = y_x(t). \tag{3}$$

当然どちらで表しても x, t についての同じ 2 階偏微分方程式となる。

変位が大きいときはこうはいかない。流体を考える。時刻 t_0 での位置で流体の各点に名前を付けて、その点の運動を調べる。つまり

$$x(x_0;t), \quad (x_0 = x(x_0;t_0)), \tag{4}$$

は、時刻 t_0 で位置 x_0 にあった点のその後の位置である。式 (1) 流の書き方ならば x_0 は添え字に書かなければならないが、体裁上パラメータの形式で書いた。これで流体の運動は完全に記述される。2 回微分して加速度とし、ニュートンの運動方程式を書くことができる。しかし式 (4) は元日の賑わいを各人の行動で表すのと同じで、不必要な情報が多くて煩雑である。このラグランジュのやり方は複雑すぎてうまくいかなかった。

代わって登場するのがオイラーの流体力学である。流体の運動状態を記述するのに式 (4) ではなく速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ の場、密度 ρ の場等を用いる：

$$\boldsymbol{v}(x,t), \quad \rho(x,t), \cdots. \tag{5}$$

流体の各点の行動を書いているのではないので、例えば墨流しの模様を調べるには不向きであり、それにはラグランジュ方式の方が優れている。然し均質の流体ならば場で十分であり、取り扱いが簡単で物理的である。流体力学はこのようにして場の形式で発展した。

連続体はこのように質点の集まりと見ることもできるし、場で記述することもできる。弦の振動ではどちらの記述法も同じであるが、流体力学では場のやり方が物理的に優れている。一方力学の出発点となった惑星の運動はもちろん質点系方式である。ニュートンの質点系の力学を場の形式に書き直すのは不可能ではないだろうが、数学的にも物理的にも無理がある。逆に、電磁気は場でなければならない。百数十年前の先輩は電磁現象をエーテルという物質の変形で説明しようと努力したようである。しかし空間に満ちた媒質が変動するという考え方は実験で否定されてしまった。マイケルソンとモーレイによると、媒質が存在するという兆候は全く認められなかった。(正確に言うと、媒質が否定されたのではなく、媒質のニュートン力学に伴うガリレオ変換が否定されたのである。この間の事情は次節の後半で述べる。）電磁場はものが動いて生じるのではなく、場で記述するほかない。これは相対性理論の問題であるので、次に場と相対性原理について考えたい。

節を終わるまえに気体分子運動論について述べる。気体を連続体ではなく、質点（分子）の集団とするのである。これによって温度の意味がよくわかり、ボイル・シャルルの法則を導くことができる。しかしこれは今まで述べた場と質点系との対立ではなく、巨視的見方と微視的見方、あるいは古典物理と量子物理との対立というべきであろう。もっとも完全気体で低密度の自由粒子を扱うのだから、いわゆる量子効果は現れない。分子はニュートン粒子として扱われ、統計力学が用いられる。

3. 場と相対性理論

場とは空間座標 x と時間 t の関数 $\varphi(x,t)$ のことである。われわれの $3+1$ 次元空間では変数は x,y,z,t の４個である。これらの変数は同等の資格で入っている。多変数の偏微分方程式が与えられたら変数変換を考えたくなる。３次元等方空間では縦 x、横 y、高さ z は座標系の取り方で決まるもので、方程式は３次元直交変換で不変である。地上では水平方向と高さとは違うもののようにも思えるが、宇宙船内の無重力状態を見るとわれわれの空間が３次元等方であることがわかる。

時間はどうか、時間をどうやって計るか。時間の経過を知るには周期的なものの繰り返し回数を数えればよい。国際単位系の定めるところによると、時間はある原子の出す光の振動周期を基に定められる。光の波動は

$$\sin k(x-ct) = \sin 2\pi(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}), \qquad (6)$$

の形に書ける。波動の山から山までの時間経過が周期 T なのだが、ある瞬間に空間的に λ だけ移動しても次の山に至る。山から山までの経過という意味では時間と空間的距離に区別はない。x と ct とは同じものである。式 (6) の波動でいえば物理的意味のあるのは位相 $kx-kct$ だけであり、x,t は座標系の取り方で互いに移り変わるものである。光速度 c はどんな場合でも一定値であり、物理は４次元ミンコフスキー空間のローレンツ変換で不変であるというのが相対性原理である。

場の形式では相対性原理はきわめて自然に導入できる。これに対し質点系 (1) は相対性原理を受け入れる形になっていない。時刻 t と空間座標 x とは、独立変数と関数値という全く違った資格で現れている。これらの変数の変換を考えたり、それの不変性を云々するのは容易なことではない。しかし相対論的質点系力学が不可能というわけではない。各質点に固有時刻 τ_i を導入して独立変数とし、位置 x_i と並べて時刻 t_i を用いる多時間理論をつくる。多時間の物理的意味が不明ならば同時刻にして考える。こうして一見したところローレンツ不変には見えないが、内容は相対性原理に合致する理論ができる。

この方針ならば、電磁気を質点形式に書くこと、つまりエーテルを復活させることもできる。空間に格子を導入して、各格子点に質点らしきものを置く。その運動を決めるラグランジアン（隣の格子点との相互作用を含む）をうまくとって、それを時間積分した全体の作用が、格子間隔を０にする極限でマクスウェル電磁場の作用と等しくなるようにすることができる。格子が固定されているので、理論はローレンツ変換どころか空間回転もできない。しかし作用は格子間隔０の極限では正しいので、この極限では万事正しい結論が導かれるはずである。この格子エーテル内の光の速度は一見しただけではわからないが、マイケルソン・モーリの実験と合致するはずである。

結論として、場の形式は相対性理論に適した形態であり、質点系は本質的に非相対論的である。原理的にはある現象を場でも質点系でも書き表すことができる。しかし一般に、一方の見方が物理的であり、数学的に優れているので、これであると断定することが許される。惑星運動を、空間内の質量密度分布という場で表し、計算することもできるだろうが、質点系としてニュートン力学を使うのがはるかによい。電磁現象は、エーテルよりマクスウェルの場で記述するべきである。弦の振動はこれらの中間で、どちらで言っても同じである。

4. 電子は場か質点か

何々が場か質点か？という質問は物理学における昔からの問題であったる。まず光はどうか。光は直進し、鏡で反射する。これらは弾性的な質点で説明されるのでまず粒子説が唱えられ、その後干渉、回折現象が見いだされて波動説となった。しかし２０世紀初頭に光量子が導入された。電子も同様である。電子流は直進し、電

界、磁界で曲げられるが、これは電荷を持った質点の流れで解釈でき、電子は質点とされた。その後の展開で波動性も認められたので、粒子、波動の２重性が言われるようになった。

しかし場か質点かという問題は勝負があったようなものである。我々の物理が相対性原理に従うということは根本的な事実として受け入れている。相対性理論を展開するには場でなければならない。ゆえにすべてのものは場である、ということになる。

この議論は確かに正しい。実験的にも確かめられている。光が場の波動であるならば干渉現象を示すはずであるが、単色光を二重スリットに通せば干渉縞が認められる。これはまさに波動性の証明であり、質点の流れでは説明できない。

電子の場合も同様である。波動の波長が光の場合よりはるかに短いので、巨視的な二重スリットでは干渉縞を認めるのは困難である。その代わり電子線を結晶に通して波動に特有の回折像をつくることができる。さらに、十分きれいな電子流をつくれば巨視的な装置を通して干渉図形を描かせることもできる。従って間違いなく電子は場の波動である。

電界、磁界で曲げられるためには、電子である場の波動は電荷を持たなければならない。波動が電荷を持つのは意外に感じられる。普通の波動はいずれ減衰して消滅してしまうが、全電荷は不変であり、なくならないものである。従って電荷を持つためには決してなくならない保存量が定義できるような場でなければならない。

電荷を持つ場は複素場によって実現される。実数の場ではエネルギーだけしか保存量が作れないが、複素場には複素数の位相という自由度があり、それに共役な運動量が定義できる。ラグランジアンが実数（位相変換で不変）ならばこの運動量は絶対的に保存する。これを全電荷と定義すればよく、こうして場に電荷を持たせることができる。この複素場の系は位相変換で不変である、すなわち位相が変わっても何ら物理的変化が起こらないので、位相を測ることができない。ただしある基準状態の位相を定めれば、それとの干渉により位相差を測ることはできる。

電子は複素場 $\psi(x,t)$ で記述される。場の方程式は元々は相対論的なものなのだが、原子物理では非相対論的近似をしたシュレディンガー方程式が用いられる。$\rho = |\psi|^2$ は電荷密度を与え、それを全空間で積分した全電荷は保存される。電子流で、その微小領域を切り出して考えると、つまり電荷密度が微小領域に集中して点のように見える場合を考えると、それはニュートンの方程式に従って運動することが示される。結局ニュートンの力学は、場の理論で広がりの小さい波の固まりの運動を解く近似理論になっている。

これで話が終わりならば簡単であったが、電子に対するシュレディンガーの場 ψ は「第２量子化」しなければならなくなった。電子場だけでなく、電磁場をはじめすべての場は第２量子化されなければならない。一方電子を質点として扱う量子力学が完成した。この間の事情をしらべる。

5. 量子力学

電子の流れである陰極線が発見されたのは１９世紀末であるが、当時の先輩たちは陰極線は電子という質点の流れとした。これは当然といえる。陰極線は電界、磁界を加えると曲がるが、その振る舞いは負電荷を持った質点の運動と一致するからである。他方電子流を流体のような連続体として場で表すこともあり得たのだが、マクスウェルの電磁場理論は確立していたとい え、まだ場の考えはなじみが薄かったのであろう。とくに、電荷を持つ場というのは考えにくかったと思われる。

こうして質点の電子論が発足したのだが、直ちに多くの困難に遭遇した。まず、負の点電荷と正電荷の原子核では静電引力で両者は合体してしまい、安定な原子は存在し得ない。はじめ

惑星運動のように核の周りを周回していても、電磁放射で次第にエネルギーを失い、合体してしまう。また原子からの発光は無限個の線スペクトルからなるが、質点系の安定点近くの固有振動は自由度の数しかない。第一、安定状態がないのであった。さらに原子スペクトルは、振動数が２つの項の差で

$$\nu_{mn} = T_m - T_n, \tag{7}$$

の形で与えられるというリッツの法則があるが、これは質点の力学では全く理解できない。

これらの点は、電子を波動とすれば片づくものであり、電子が質点ではなく、場で記述するべきであることを示している。しかし先輩たちは質点に固執した。電子は質点なのだが、原子のような微視的空間ではニュートン力学は成立せず、新しい力学に支配されるというのである。この執念でついに新しい力学—量子力学を創りあげてしまったのは驚くべきことである。この力学は、シュレディンガー方程式による場形式の理論と変換で結ばれており、同じ内容であることが証明された。

ここで量子力学の解説をする必要はないが、その要点を述べると、

1．電子は位置 $x(t)$ で記述される。
2．$x(t)$ はニュートンの運動方程式に従う。
3．x、その他物理量は一定の条件（量子条件）に従う非可換量である。

物理量はある無限次元複素線形空間 R の演算子として具体化できる。

4．電子の状態は空間 R の要素 ψ で与えられる。量 A を測ると、期待値として $(\psi, A\psi)$ が得られる。

これによると電子状態の情報は R の要素 ψ がもっている。ψ はシュレディンガーの $\psi(x,t)$ と同じ内容のものである。ゆえに、量子力学で電子を質点で記述したと言っても.、実際は場で表しているのである。電子は場であるという命題が正しい。

前の節ではたとえば流体を場で書くか、多数個の質点系で表すかを論じてきて、どちらでも何とかなると言うことであったが、いま考えている先輩たちの議論は電子場を１個の質点 x で表そうとしているので、これは到底無理である。位置 x という量がきわめて複雑なものになってしまい、場でやるほうがはるかにスマートである。

電荷密度がある狭い領域に集中しているときは近似的に点と見なしてよい、この点はニュートンの方程式に従って運動する。これが古典近似である。粗く言って質点は場の古典近似である。逆に、ある力学系Ａから、古典近似をすればＡになるような基の力学系Ｂに移る手続きが量子化である。ＢではＡのエネルギー等が離散的に量子化されるからである。質点の力学を量子化したものが量子力学であった。

量子力学系で電子の位置を測ろうとすると、いわゆる観測、確率解釈の問題が生じる。電荷密度がある範囲にわたって連続的に分布しているとき、電子の位置は何処かと訊かれたならば、確定したことはいえない。ここで見つかることもそこで見つかることもあり、その確率は云々というほかない。確定的なことが言えないからといって、量子力学で因果律が壊れたと騒ぐ必要はない。電子は場であり、連続的な波動関数で表せばよいのを、位置 x で表そうとするから確率が必要になるのである。しかしこの量子力学スキームも正しく解釈すればで矛盾はなく、波動と同じ結論が得られるのである。

6. 場の第２量子化

光も電子も場であることがわかった。それらに対する方程式も得られた。マクスウェル方程式とシュレディンガー方程式である。しかしここまでではまだ十分でない。電磁場については、熱放射の式を出すには光量子というものが必要である。電子については、電荷に素量があり全電荷は常に素量の整数倍であることを説明しなければならない。水素原子は容易に説明できるが、ヘリウム原子以上の多電子問題は素朴な

シュレディンガー方程式では解決できない。これらのためには場を量子化しなければならない。その手順は次の通りである。

質点に対するニュートンの力学は量子力学、すなわち電子場の理論の古典近似なのであった。微視的世界では古典近似は通用せず、場の理論でやらなければならないというのが量子物理である。古典物理のもう一つの理論、電磁気学はどうだろうか。私たちはマクスウェルの理論を根本的なものと見なしてきた。しかしニュートン力学が、実はシュレディンガー方程式の古典近似であったように、マクスウェル理論ももっと先の理論、量子電磁力学の古典近似ではないだろうか。つまり古典電磁気学を量子化したらどうなるか。実はこれが正解なのである。

古典電磁気学を量子化するには次のようにする。電磁場を固有振動で展開する。展開係数に対する運動方程式は単振動のものであり、結局電磁場は調和振動子の集団ということになる。調和振動子を量子化するのは量子力学のイロハであり、知り尽くされている。結果として調和振動子のエネルギーは等間隔に量子化されている。これらにより電磁場のエネルギーと運動量は

$$E = \sum \hbar\omega_i n_i, \quad \boldsymbol{P} = \sum \hbar \boldsymbol{k}_i n_i$$
$$n_i = 0, 1, 2, \cdots \tag{8}$$

となる。i は固有振動の種類を表す。エネルギー $\hbar\omega$、運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$ を持つ状態は光量子あるいは光子と呼ばれるもので、式 (8) は量子化された電磁場は光子の集団であることを表している。これでプランクの放射公式などうまくいく。

電子はどうか。電子の場に対するシュレディンガー方程式はニュートン力学を量子化したものとみることができ、量子物理の方程式のようにみられがちだが、実は電磁場のマクスウェル方程式と同格のもので、古典方程式である。このことは、普通書かれているシュレディンガー方程式の両辺を $\hbar$ で割ってみると、定数は $(e/\hbar), (m/\hbar)$ の組み合わせでのみ現れ、量子性を示す小さい量（アボガドロ数に逆比例する量）は含まれていないことからわかる。したがって電子場も電磁場と同様に量子化しなければならない。

電子場の量子化も電磁場のときと同様と言いたいところだが、大きな違いはフェルミ統計に従うように量子化することである。これは相対論的電子論でエネルギーがマイナスになってしまうのを、空孔理論により救うために必要である。こうして電子場も量子化され、電子の集団となる。これで多電子問題も片づけられる。

光子も電子も粒子であるが、粒子とは何かをはっきりさせなければならない。常識的に言えば粒子とは米粒のように小さな拡がりをもった固体であろう。しかし素粒子物理では次のように定義する。粒子とは確定したエネルギー E、運動量 $\boldsymbol{p}$ をもち、

$$E^2 - c^2\boldsymbol{p}^2 = m^2c^4, \tag{9}$$

の関係を満たす状態である。m は粒子の静止質量で、光子の場合は 0 である。運動量が確定しているときは、不確定性原理により（微視的には）空間的に無限に広がった波である。ただし巨視的には小さい固まりとする。この定義によれば粒子は平面波であり、たとえば電子は波か粒子かという問いは意味をなさない。もっともこの問いかけは、粒子を常識的に解釈して、場か質点系かを問題にしているのである。

場か質点かと問われたとき、正確な答えは次のものだろう。電子も光も第２量子化された場で表される。量子化された波動とは式 (8) のように１個、２個と数えられるもので、粒子の集団である。電子場の古典近似が質点の力学である。光は止めることができないので、古典近似でも質点にはならない。幾何光学のように線で表される。

7. 場の量子論

すべての粒子、あるいはすべてのものは第２量子化された場で表される。これを扱うのが場

の理論、より正確には場の量子論で、素粒子物理などに適用され、一応の成功を収めている。しかしこの場の量子論はつぎに述べるように不満足なものである。

場とは $\varphi(x,t)$ のように表されるものだが、量子化にあたってこれを調和振動子のように $x_i(t)$ で表される質点の集団に置き換えてしまった。つまりやっているのは場の理論ではなく、自由度無限大の質点系の量子力学なのである。質点系であるので、一見して相対論的不変性がわかるように記述するのが困難であるが、相対論的不変であることを証明することはできる。しかし無限大の自由度は深刻である。量子力学では各自由度ごとになにがしかの零点振動が存在する。このため全体ではエネルギーを始め種々の物理量が無限大になってしまう。発散の困難が現在の場の量子論の難点である。

実は場を調和振動子に分解したところで２回目の、場か質点かの対立が生じたのである。質点 $x_i(t)$ の量子力学（非可換な量子的な量を扱うｑー数理論）は場 $\psi_i(x,t)$ の古典論（可換な古典的数を扱うｃー数理論）と同等であった。無限個の質点のｑー数理論は無限個の場, あるいは汎関数 $\Psi[\psi(x,t)]$ のｃー数理論で与えることもできる。空間の各点に異なる時刻を付与するという超多時間理論により相対論的不変な形に書けるし、ｃー数なので観測の問題とか確率解釈といった面倒なことはない。しかし慣れていないせいもあるが、汎関数の物理的意味がわかりにくい。むしろ式 (8) のような粒子の量子力学の方が意味がよくわかる。さらに汎関数理論であっても、それは質点系量子力学と同等なので、発散の困難は依然として避けられない。こうして多質点系方式が専ら用いられる。

ここでもう一度振り返って考える。相対性原理に従うならば、質点系でなく、場の理論を展開すべきなのである。しかし量子論的場の理論は存在しない。現在行われているのは場の理論でなく、（無限個）質点系の量子論である。つまり、素粒子論を扱うのに、流体力学のラグンラジュ形式と同様な方式でやっている。これは間違いではないのだが、正しいとは言えないのではないか。それでは流体のオイラー理論にならって場の量子論を創るにはどうしたらよいか。前段で述べた汎関数方式が正解とは言えない。もっと根本的飛躍が必要であろう。

場の量子論から抜け出ようとの試みはなされている。多くの人が精力的に研究しているのはひもの理論である。時空点の関数である場ではなく、ひも状態を引数とする汎関数から出発し、これの量子論を展開する。ゼロ次元の点を１次元のひもにしたのでは物足りなく、２次元の膜、一般に d ー次元のものを考えても良い。３＋１次元の「場」を採るならば、それは前々段の安閑数方式の量子論（第３量子化）であり、検討に値する。しかしひもなどを関数系で展開し、全体を多変数関数に置き換えてしまうのでは、自由度は飛躍的に大きくなったが所詮は質点系であり、正しい方向に進んでいるとは期待できない。

場は時空点 x,t における状態を云々する局所的なものである。これに対し量子力学はある時刻の状態を考え、その時間的発展を追うというもので、本質的に場の考えと相容れない。４次元時空の相対性理論は整っており、これを変えたくないならば量子化の方を変えなければならない。４次元的な「量子化法」を発明しなければならない。

参考文献

1)　宮沢弘成：日本物理学会誌 55，251(2000)
http://www7.ocn.ne.jp/~ miyazaw1

（みやざわ・ひろなり，神奈川大学総合理学研究所）